ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνονται τα σύνολα $A=\{33,-17,23,35,41,-20\}$ και $B=\{0,1,2,3,4,5,6\}$.
Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία $\alpha\in A$ σε εκείνα τα στοιχεία $\beta\in B$ για τα οποία ισχύει $\beta\equiv\alpha(\bmod 7)$.

2. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς;

(i) $15\kappa+1\equiv 1(\bmod 3)$, $\kappa\in\mathbf{Z}$, (ii) $15\kappa+1\equiv -4(\bmod 5)$, $\kappa\in\mathbf{Z}$,

(iii) $\kappa^2+5\equiv 1(\bmod 4)$, $\kappa\in\mathbf{Z}$, (iv) $(m+1)^3\equiv 1(\bmod m)$, $m\in\mathbf{N}^*$.

3. Να βρείτε τους διψήφιους θετικούς ακέραιους α για τους οποίους ισχύει $\alpha \equiv 6 (\bmod 11)$.

4. Να βρείτε τους διψήφιους θετικούς ακέραιους α για τους οποίους ισχύει
(i) $\alpha \equiv 2 (\bmod 3)$ και $\alpha \equiv 1 (\bmod 4)$ (ii) $\alpha \equiv 3 (\bmod 4)$ και $\alpha \equiv 4 (\bmod 6)$.

5. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης
(i) του 2^{100} με τον 7, (ii) του 9^{100} με τον 8
(iii) του 3^{1998} με τον 7, (iv) του 5^{2004} με τον 26.

6. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in \mathbf{N}^*$ ισχύει
(i) $8 | (5^{2\nu} + 7)$ (ii) $5 | (2^{\nu+1} + 3^{3\nu+1})$,
(iii) $15 | (2^{4\nu} - 1)$ (iv) $21 | (2^{2\nu+4} + 5^{2\nu+1})$

7. Να βρείτε
(i) το τελευταίο ψηφίο του αριθμού 3^{1998}
(ii) τα δύο τελευταία ψηφία του αριθμού 7^{2003}.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι ο ακέραιος $3\alpha^2 - 1$, όπου $\alpha \in \mathbf{Z}$, δεν είναι ποτέ τετράγωνο ακεραίου.

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό πρώτο $p > 5$ ισχύει $10 | (p^2 - 1)$ ή $10 | (p^2 + 1)$.

3. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbf{Z}$ για τις οποίες ισχύει $5 | (\alpha^2 + \alpha - 6)$.

4. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbf{Z}$ για τις οποίες ισχύει $x \equiv 1 (\bmod 2)$ και $x \equiv 2 (\bmod 3)$.

5. Να αποδείξετε ότι για κάθε ακέραιο α οι αριθμοί α και α^5 έχουν το ίδιο ψηφίο μονάδων. (πχ εαν $\alpha = 2$ τοτε $\alpha^5 = 32$)

6. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$ και $m, n \in \mathbf{N}^*$. Να αποδείξετε ότι
(i) Αν $\alpha \equiv \beta (\bmod m)$ και $n | m$, τότε $\alpha \equiv \beta (\bmod n)$
(ii) Αν $n\alpha \equiv n\beta (\bmod m)$ και $(m, n) = 1$, τότε $\alpha \equiv \beta (\bmod m)$.

7. Αν $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$ και $m \in \mathbf{N}^*$ με $\alpha \equiv \beta (\bmod m)$, να αποδείξετε ότι $(\alpha, m) = (\beta, m)$.

8. Να αποδείξετε ότι:
(i) $39 | (53^{103} + 103^{53})$, (ii) $7 | (111^{333} + 333^{111})$.

9. Να αποδείξετε ότι:

(i) Για κάθε θετικό ακέραιο α ισχύει $\alpha^2 \equiv 0$ ή 1 ή $4 (\bmod 5)$.

(ii) Οι αριθμοί $\sqrt{5\nu+2}$ και $\sqrt{5\nu+3}$ είναι άρρητοι.

10. Να αποδείξετε ότι:

(i) Αν ο p είναι πρώτος και μεγαλύτερος του 3, τότε $p^2 \equiv 1 (\bmod 3)$.

(ii) Αν οι p, p_1, p_2 και p_3 είναι πρώτοι και μεγαλύτεροι του 3, τότε οι p^2+2 και $p_1^2+p_2^2+p_3^2$ είναι σύνθετοι.

(iii) Αν οι p, q είναι πρώτοι περιττοί και μεγαλύτεροι του 3, τότε $6 \mid (p^2-q^2)$.

11. Να βρείτε το ψηφίο των μονάδων των αριθμών 77^{77} και 333^{333}.

12. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $2^{1999}+2^{1997}-1$ είναι σύνθετος.

Παρατήρηση: Ορισμένες φορές για συντομογραφία παραλείπεται το mod m αλλά θα εννοείται γράφοντας και μόνο το σύμβολο "≡"

ΙΣΟΫΠΟΛΟΙΠΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ (ΑΣΚΗΣΕΙΣ)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ:

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1) Έστω τα σύνολα

$A=\{33,-17,23,35,41,-20\}$ και $B=\{0,1,2,3,4,5,6\}$

Γνωρίζουμε ότι $\beta \equiv a \pmod 7$

Για τα στοιχεία του συνόλου A, έχουμε:

$33=4\cdot 7+5$ οπότε $33\equiv 5 \bmod 7$

$-17=(-3)\cdot 7+4$ οπότε $-17\equiv 4 \bmod 7$

$23=3\cdot 7+2$ οπότε $23\equiv 2 \bmod 7$

$35=5\cdot 7+0$ οπότε $35\equiv 0 \bmod 7$

$41=5\cdot 7+6$ οπότε $41\equiv 6 \bmod 7$

$-20=(-3)\cdot 7+1$ οπότε $-20\equiv 1 \bmod 7$

2) i) $15\cdot k+1\equiv 1 \bmod 3,\ k\in\mathbb{Z}$

$(15\cdot k+1)-1=15k=3\cdot(5k)$ ← πολλαπλάσιο του 3 (ΑΛΗΘΗΣ)

ii) $15k+1\equiv -4 \bmod 5,\ k\in\mathbb{Z}$

$(15k+1)+4=15k+5=5(3k+1)$ ← πολλαπλάσιο του 5 (ΑΛΗΘΗΣ)

iii) $k^2+5\equiv 1 \bmod 4,\ k\in\mathbb{Z}$

$k^2+5-1=k^2+4$ ← όχι πολλαπλάσιο του 4 (στην περίπτωση όπου το k περιττός) (ΨΕΥΔΗΣ)

iv) $(m+1)^3\equiv 1 \bmod m,\ m\in\mathbb{N}^*$

Αφού ισχύει $(m+1)\equiv 1 \bmod m$ τότε από ιδιότητες $(m+1)^3\equiv 1 \bmod m$ (ΑΛΗΘΗΣ)

3) $\left.\begin{array}{l} a = 6 \bmod 11 \\ 10 \leq a < 100 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} a = 11k+6 \\ 10 \leq a < 100 \end{array}\right| \; k \in \mathbb{Z}$

και άρα

$10 \leq a < 100 \Leftrightarrow 10 \leq 11k+6 < 100 \Leftrightarrow 4 \leq 11k < 94 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{4}{11} \leq k < \frac{94}{11} \Leftrightarrow k = 1,2,3,4,5,6,7,8$

Άρα, $a = 17, 28, 39, 50, 61, 72, 83, 94$

4) (i) $a \equiv 2 \bmod 3$ & $a \equiv 1 \bmod 4$

Εφόσον, $3|2 \Leftrightarrow 2 = 0 \cdot 3 + 2$ και $4|1 \Leftrightarrow 1 = 0 \cdot 4 + 1$

τότε $a = 3x+2$, $x \in \mathbb{Z}$ τότε $a = 4y+1$, $y \in \mathbb{Z}$

Άρα, $3x+2 = 4y+1 \Leftrightarrow -3x+4y = 1$ (Διοφαντική εξίσωση)

Προφανής λύση η $(x_0, y_0) = (1,1)$. Άρα οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης θα δίνονται από τους τύπους:

$x = 1+4t$ και $y = 1+3t$, $t \in \mathbb{Z}$

Επομένως, αφού $a = 3x+2$ και $a = 4y+1$, $x, y \in \mathbb{Z}$

$a = 5+12t$, $t \in \mathbb{Z}$

Αλλά το a θετικός 2ψήφιος $\rightsquigarrow 10 \leq a < 100 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10 \leq 5+12t < 100 \Leftrightarrow 5 \leq 12t < 95 \Leftrightarrow \frac{5}{12} \leq t < \frac{95}{12} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = 1,2,3,4,5,6,7$

Άρα, οι τιμές του a είναι:

$a = 17, 29, 41, 53, 65, 77, 89$

(ii) $a \equiv 3 \bmod 4$ και $a \equiv 4 \bmod 6$

Τότε, όπως στην (i), θα γίνει:

$a = 4x+3$ και $a = 6y+4$, $x, y \in \mathbb{Z}$

Έτσι, $4x+3 = 6y+4 \Leftrightarrow 4x-6y = 1$ Αδύνατη

δεν έχει λύσεις στους ακεραίους αφού $(4,-6) = 2 \nmid 1$

5) (i) Επειδή $2^3 = 8 \equiv 1 \bmod 7$ και $100 = 3\cdot 33+1$

τότε $2^{100} = 2^{3\cdot 33+1} = (2^3)^{33}\cdot 2 \equiv 1^{33}\cdot 2 \equiv 2 \bmod 7$

Άρα, το ζητούμενο υπόλοιπο είναι ίσο με 2

(ii) Επειδή $9 = 1 \bmod 8$

τότε $9^{100} \equiv 1^{100} = 1 \bmod 8$, Άρα το υπόλοιπο είναι ίσο με 1

(iii) Επειδή $3^3 = 27 \equiv -1 \bmod 7$ και $1998 = 3\cdot 666$

τότε $3^{1998} = (3^3)^{666} \equiv (-1)^{666} \equiv 1 \bmod 7$

Άρα, το ζητούμενο υπόλοιπο είναι ίσο με 1

(iv) Επειδή $5^2 = 25 \equiv -1 \bmod 26$ και $2004 = 2\cdot 1002$

τότε $5^{2004} = (5^2)^{1002} \equiv (-1)^{1002} = 1 \bmod 26$

Άρα, το ζητούμενο υπόλοιπο είναι ίσο με 1

6) (i) $5^2 = 25 \equiv 1 \bmod 8$

Έτσι, $5^{2\nu} + 7 = (5^2)^\nu + 7 = 1^\nu + 7 \equiv 1+7 \equiv 8 \equiv 0 \pmod 8$

Άρα, πράγματι $8 \mid (5^{2\nu}+7)$.

(ii) $2^{\nu+1} + 3^{3\nu+1} = 2\cdot 2^\nu + 3^3\cdot 3^\nu = 2\cdot 2^\nu + 27\cdot 3^\nu \equiv$

$\equiv 2\cdot 2^\nu + 3\cdot 2^\nu \bmod 5$, αφού $27 = 2 \bmod 5$

$\equiv 5\cdot 2^\nu \bmod 5 \equiv 0 \bmod 5$

Άρα, πράγματι $5 \mid (2^{\nu+1} + 3^{3\nu+1})$.

(iii) $2^4 = 16 \equiv 1 \bmod 15$

$2^{4\nu} - 1 = (2^4)^\nu - 1 = 16^\nu - 1 \equiv 1^\nu - 1 \equiv 0 \bmod 5$

Άρα, $15 \mid (2^{4\nu}-1)$

(iv) $2^{2\nu+4} + 5^{2\nu+1} = 2^{2\nu}\cdot 2^4 + 5^{2\nu}\cdot 5 = 16\cdot 4^\nu + 5\cdot 25^\nu \equiv$

$\equiv (-5)\cdot 4^\nu + 5\cdot 4^\nu \bmod 21$ αφού $\begin{cases} 16 \equiv -5 \bmod 21 \\ 25 \equiv 4 \bmod 21 \end{cases}$

$\equiv 0\cdot 4^\nu \bmod 21 \equiv 0 \bmod 21$

Άρα, πράγματι $21 \mid (2^{2\nu+4} + 5^{2\nu+1})$

7) (i) Αρκεί να βρούμε το υπόλοιπο της διαίρεσης του 3^{1998} με το 10.

Ισχύει ότι:

$3^2 = 9 \equiv -1 \mod 10$ και $1998 = 2 \cdot 999$

Επομένως

$$3^{1998} = (3^2)^{999} \equiv (-1)^{999} = -1 \equiv 9 \mod 10$$

Άρα, το τελευταίο ψηφίο είναι το 9

(ii) Αρκεί να βρούμε το υπόλοιπο της διαίρεσης του 7^{2003} με το 10

και συνεχίζουμε ανάλογα όπως το (i).

(Υπόδειξη: το τελευταίο ψηφίο είναι το 43).

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1) Έστω ότι ο αριθμός $3a^2-1 \in \mathbb{Z}$ είναι τετράγωνο ενός ακεραίου β

Δηλ. $3a^2-1 = \beta^2 \Rightarrow \beta^2 \equiv -1 \mod 3$

οπότε $\beta^2 \equiv 2 \mod 3$ (1)

όμως $\beta = 0,1,2 \mod 3$, οπότε $\beta^2 \equiv 0,1 \mod 3$ που αντίκειται στην (1).

2) Ο αριθμός ρ θα είναι της μορφής

$\rho = 10k+u$, για $u = 0,1,\dots,9$, $k \in \mathbb{N}$

Αλλά, γνωστό ότι $\rho > 5$

Άρα, ο ρ θα είναι της μορφής

$\rho = 10k+u$, για $u = 1$ ή 3 ή 5 ή 7 ή 9, $k \in \mathbb{N}$

Επομένως, $\rho \equiv 1,3,5,7,9 \mod 10 \rightsquigarrow \rho^2 \equiv 1,9 \mod 10$

ή ισοδύναμα $\rho^2 \equiv 1,-1 \mod 10 \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow \rho^2 - 1 \equiv 0 \mod 10$ ή $\rho^2 + 1 \equiv 0 \mod 10 \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow 10 \mid \rho^2 - 1$ ή $10 \mid \rho^2 + 1$

3) <u>α' τρόπος:</u> $a^2+a-6=(a-2)(a+3)$

Επομένως,

$$5\mid(a^2+a-6) \Leftrightarrow 5\mid(a+3) \text{ ή } 5\mid(a-2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a+3=5k,\ k\in\mathbb{Z} \text{ ή } a-2=5\lambda,\ \lambda\in\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow a=5k-3,\ k\in\mathbb{Z} \text{ ή } a=5\lambda+2,\ \lambda\in\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow a=5\lambda+2,\ \lambda\in\mathbb{Z}$$

αφού ο $a=5k-3,\ k\in\mathbb{Z}$ γράφεται αλλιώς ως:

$$a=5(k-1)+2=5\lambda+2,\ \lambda=k-1$$

<u>β' τρόπος:</u> Αν το u, υπόλοιπο της Ευκλείδειας διαίρεσης του a με το 5, τότε θα ισχύει

$a\equiv u \bmod 5$, οπότε:

$a^2+a-6\equiv(u^2+u-6) \bmod 5$

Επομένως,

- Αν $u=0$, τότε $a^2+a-6\equiv-6\equiv4 \bmod 5$ $(5\nmid a^2+a-6)$
- Αν $u=1$, τότε $a^2+a-6\equiv-4\equiv1 \bmod 5$ $(5\nmid a^2+a-6)$
- Αν $u=2$, τότε $a^2+a-6\equiv 0 \bmod 5$ $(5\mid a^2+a-6)$
- Αν $u=3$, τότε $a^2+a-6\equiv6\equiv1 \bmod 5$ $(5\nmid a^2+a-6)$
- Αν $u=4$, τότε $a^2+a-6\equiv14\equiv4 \bmod 5$ $(5\nmid a^2+a-6)$

Άρα, $5\mid(a^2+a-6)$ όταν $a\equiv2 \bmod 5$ δηλ. μόνο όταν ο a είναι μορφής: $a=5\lambda+2,\ \forall\lambda\in\mathbb{Z}$

4) $x\equiv1 \bmod 2$ και $x\equiv2 \bmod$

<u>α' τρόπος:</u>

$x+1\equiv(1+1) \bmod 2 \Rightarrow x+1\equiv2 \bmod 2\equiv0 \bmod 2$

και

$x+1\equiv(2+1) \bmod 3 \Rightarrow x+1\equiv3 \bmod 3\equiv0 \bmod 3$

Άρα, $2\mid x+1$ και $3\mid x+1 \Rightarrow 2\cdot3\mid x+1 \Rightarrow 6\mid x+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x+1=6k,\ k\in\mathbb{Z}$ και άρα $x=6k-1,\ k\in\mathbb{Z}$

<u>β' τρόπος:</u> όπως η άσκηση 4 της Α' ΟΜΑΔΑΣ και θα προκύψει μια διοφαντική εξίσωση

5) Αρκεί νδο $10 \mid (a^5 - a)$.

Επειδή, όμως $10 = 2 \cdot 5$ και $(2,5)=1$ τότε από θεωρία

$10 \mid (a^5 - a) \Leftrightarrow 2 \mid (a^5 - a)$ και $5 \mid (a^5 - a)$.

Για καθεμία από τις περιπτώσεις αντίστοιχα, είναι:

- Επειδή, $a \equiv u \bmod 2$, $u = 0,1$ θα ισχύει
  $a^5 - a \equiv (u^5 - u) \bmod 2$
  Επομένως,
  $\sim$ Αν $u = 0 \Rightarrow a^5 - a \equiv 0 \bmod 2$
  $\sim$ Αν $u = 1 \Rightarrow a^5 - a \equiv 0 \bmod 2$
- Επειδή, $a \equiv u \bmod 5$, $u = 0,1,2,3,4$ θα ισχύει
  $a^5 - a = (u^5 - u) \bmod 5$
  Επομένως,
  $\sim$ Αν $u = 0 \Rightarrow a^5 - a \equiv 0 \bmod 5$
  $\sim$ Αν $u = 1 \Rightarrow a^5 - a \equiv 0 \bmod 5$
  $\sim$ Αν $u = 2 \Rightarrow a^5 - a \equiv 30 \bmod 5 \equiv 0 \bmod 5$
  $\sim$ Αν $u = 3 \Rightarrow a^5 - a \equiv 240 \bmod 5 \equiv 0 \bmod 5$
  $\sim$ Αν $u = 4 \Rightarrow a^5 - a \equiv 1020 \bmod 5 \equiv 0 \bmod 5$

Άρα, σε καθεμία των περιπτώσεων ισχύει ότι

$5 \mid a^5 - a$ και $2 \mid a^5 - a \Leftrightarrow 10 \mid (a^5 - a)$

6) (i) Έχουμε, $\begin{cases} a \equiv \beta \bmod m \\ n \mid m \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m \mid (a-\beta) \\ n \mid m \end{cases} \rightarrow \underline{n \mid (a-\beta)}$

και άρα $a \equiv \beta \bmod n$

(ii) Έχουμε $\begin{cases} na \equiv n\beta \bmod m \\ (m,n)=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m \mid n(a-\beta) \\ (m,n)=1 \end{cases} \rightarrow m \mid (a-\beta)$

και άρα $a \equiv \beta \bmod m$

7) Δίνεται, $a \equiv \beta \bmod m \Rightarrow a = \lambda m + \beta$, $\lambda \in \mathbb{Z}$

Άρα, $(a,m) = (\lambda m + \beta, m) = (\lambda m + \beta - \lambda m, m) = (\beta, m)$

8) (i) ΘΔΟ $39 \mid (53^{103}+103^{53})$

Αλλά, $39 = 3\cdot 13$ όπου $(3,13)=1$

Αρκεί δηλαδή νδο $3 \mid (53^{103}+103^{53})$ και $13 \mid (53^{103}+103^{53})$

Πράγματι,

- Επειδή $53 = 3\cdot 18 - 1$ και $103 = 3\cdot 34 + 1$ έχουμε $53 \equiv -1 \bmod 3$ και $103 \equiv 1 \bmod 3$ αντίστοιχως
  οπότε $53^{103} + 103^{53} \equiv [(-1)^{103} + 1^{53}] \bmod 3 \equiv 0 \bmod 3$

Άρα, $3 \mid (53^{103} + 103^{53})$

- Επειδή $53 = 13\cdot 4+1$ και $103 = 13\cdot 8 - 1$ έχουμε $53 \equiv 1 \bmod 13$ και $103 \equiv -1 \bmod 13$ αντιστοίχως
  οπότε $53^{103} + 103^{53} \equiv [(-1)^{103} + 1^{53}] \bmod 13 \equiv 0 \bmod 13$

Άρα, $13 \mid (53^{103} + 103^{53})$

(ii) Όμοια και μάλιστα το 7 δεν αναλύεται σε πρωτογενή μορφή διότι θεωρείται πρώτος απο μόνος του. Συνεπώς η περίπτωση (ii) είναι πιο απλουστευμένη απο την περίπτωση (i)

9) i. Εστω a θετικός ακέραιος. Άρα, $a \in \mathbb{N}^*$.
Για τον a ισχυει ότι $a \equiv u \bmod 5$, $u = 0,1,2,3,4$
άρα $a^2 \equiv u^2 \bmod 5 \Rightarrow a^2 \equiv (0,1,4) \bmod 5$

ii. Εστω οι αριθμοί $\sqrt{5v+2}$ και $\sqrt{5v+3}$ ρητοί
τότε έστω, $a = \sqrt{5v+2}$ και $\beta = \sqrt{5v+3}$
Συνεπώς, $a^2 = 5v+2$ και $\beta^2 = 5v+3$, $\forall a,\beta \in \mathbb{N}^*$
τότε, $a^2 \equiv 2 \bmod 5$ και $\beta^2 \equiv 3 \bmod 5$, Αδύνατο
(από την (i) δεν μπορεί $u=2$ ή $u=3$)

10) (i). Έστω p πρώτος και μάλιστα $p>3$.
Άρα, ο p είναι της μορφής
$p=3k+1$ ή $p=3k+2$, $k\in\mathbb{N}^*$
οπότε
$p\equiv 1 \bmod 3$ ή $p\equiv 2 \bmod 3 \Leftrightarrow$
$p^2\equiv 1 \bmod 3$ ή $p^2\equiv 4 \bmod 3 \Leftrightarrow$
$p^2\equiv 1 \bmod 3$ ή $p^2\equiv 1 \bmod 3 \Leftrightarrow$
$p^2\equiv 1 \bmod 3$.

(ii). Από την (i):
• $p^2+2\equiv(1+2) \bmod 3 = 3 \bmod 3 \equiv 0 \bmod 3$
δηλ. $3|p^2+2 \Leftrightarrow p^2+2$ σύνθετος
• $p_1^2+p_2^2+p_3^2\equiv(1+1+1) \bmod 3 \equiv 0 \bmod 3$
δηλ. $3|(p_1^2+p_2^2+p_3^2) \Leftrightarrow p_1^2+p_2^2+p_3^2$ σ... τος

(iii) $6=2\cdot 3 \overset{\text{ΘΔΟ}}{|} (p^2-q^2) \overset{\text{ΘΔΟ}}{\Rightarrow} 2|(p^2-q^2)$ και $3|(p^2-q^2)$
Πράγματι:
• Επειδή, p,q περιττοί, οι p^2 και q^2 περιττοί
οπότε p^2-q^2 άρτιος $\Rightarrow 2|(p^2-q^2)$
(απόδειξη: $p=2k+1$ και $q=2\lambda+1$, $\forall k,\lambda\in$
$p^2-q^2=(2k+1)^2-(2\lambda+1)^2=4k^2-4\lambda^2+4k-4\lambda=$
$=2(\underbrace{2k^2-2\lambda^2-2\lambda+2k}_{\mu})=2\mu$, $\mu\in\mathbb{Z}$ άρτιος)

• Επειδή, p,q πρώτοι >3 τότε από (i) ισχύει
$p^2\equiv 1 \bmod 3$ και $q^2\equiv 1 \bmod 3$
άρα $p^2-q^2\equiv 0 \bmod 3 \Leftrightarrow 3|p^2-q^2$.

11) • Επειδή, $77 \equiv 7 \mod 10 \Rightarrow 77^{77} \equiv 7^{77} \mod 10$ (1)

$7^2 = 49 \equiv -1 \mod 10$

Άρα στην (1):

$7^{77} \mod 10 \equiv 7^{2\cdot 38+1} \mod 10 \equiv (7^2)^{38} \cdot 7 \mod 10 \equiv$

$\equiv 7 \mod 10$ → Το τελευταίο ψηφίο του 77^{77} είναι το 7

• Επειδή, $333 \equiv 3 \mod 10 \Rightarrow 333^{333} \equiv 3^{333} \mod 10$ (2)

$3^2 \equiv 9 \equiv -1 \mod 10$

Άρα, στην (2):

$3^{333} \mod 10 \equiv 3^{2\cdot 166+1} \mod 10 \equiv (3^2)^{166} \cdot 3 \mod 10 \equiv$

$\equiv 3 \mod 10$ → Το τελευταίο ψηφίο του 3^{333} είναι το 3

12) Επειδή $2 \equiv -1 \mod 3$, τότε:

$2^{1999} + 2^{1997} - 1 \equiv [(-1)^{1999} + (-1)^{1997} - 1] \mod 3 \equiv$

$\equiv (-1-1-1) \mod 3 \equiv -3 \mod 3 \equiv 0 \mod 3$

Άρα, το $2^{1999} + 2^{1997} - 1$ σύνθετος διότι διαιρείται από τον αριθμό 3 ενώ παράλληλα είναι μεγαλύτερος του 3.

Παρατήρηση (για την 12) | ΠΟΡΙΣΜΑ:

• $2^{a} + 2^{a-2} - 1$ σύνθετος αριθμός, εάν α περιττός και παράλληλα $a \in \mathbb{N}^*$ με $a > 2$.